On a:

$y \in]0,1]$ Donc $y \leq 1$ d'où

$$\boxed{f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1 - e^{x-1}}}$$

Exercice 24

1) $x \in]0,+\infty[. g(x) = -1 + x + 2\ln x$

a) $g'(x) = 1 + \dfrac{2}{x} > 0$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$			
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} (-1 + x + 2\ln x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (-1 + x + 2\ln x) = +\infty$

b) $g(1) = -1 + 1 + 2 \times 0 = 0$

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

c) •Si $x > 1$ on a : $\dfrac{1}{x} < 1$ Donc $g\left(\dfrac{1}{x}\right) < 0$

•Si $0 < x < 1$ on a : $\dfrac{1}{x} > 1$ Donc $g\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0$

2) $\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ln x, x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x - x^2 \ln x}{x}$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} (1 - \underbrace{x \ln x}_{0}) = 1$

Donc f est dérivable à droite en 0 et $f_d'(0) = 1$

b) pour $x > 0$ on a :

$f'(x) = (x - x^2 \ln x)'$

$= 1 - (x^2 \ln x)'$

$= 1 - \left(2x \ln x + x^2 \times \dfrac{1}{x}\right)$

$= 1 - 2x \ln x + x = x\left(\dfrac{1}{x} - 2\ln x + 1\right)$

$= x\left(\dfrac{1}{x} + 2\ln\dfrac{1}{x} + 1\right) = x \times g\left(\dfrac{1}{x}\right)$

c) $f'(x) = x \cdot g\left(\dfrac{1}{x}\right)$: le signe de

f'est celui de $g\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ 0	↗	1	↘	$-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x - x^2 \ln x = \lim\limits_{x \to +\infty} x(1 - x\ln x) = -\infty$

d) * f est continue et strictement décroissante sur $]0,1[$.

$f(]0,1]) =]0,1]$ or $0 \notin]0,1]$.

Donc $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans $]0,1]$

* f est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.et $f([1,+\infty[) =]-\infty,1]$.

$0 \in]-\infty,1]$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [1,+\infty[$.

Conclusion :

Dans $]0,+\infty[$ l'équation $f(x) = 0$ admet Une unique solution α.

$f\left(\dfrac{7}{4}\right) = \dfrac{7}{4} - \dfrac{49}{16}\ln\dfrac{7}{4} \approx 0,036 > 0$

$f(2) = 2 - 4\ln 2 \approx -0,77 < 0$

$f\left(\dfrac{7}{4}\right) \times f(2) < 0 \Rightarrow \boxed{\dfrac{7}{4} < \alpha < 2}$.

Oarray.tn -Aqra Blech- Oarray.tn